$$\begin{aligned} m_{11}-m_{22}-m_{33} &= (1-2y^2-2z^2)-(1-2x^2-2z^2)-(1-2x^2-2y^2) \\ &= 4x^2-1 \end{aligned} \tag{8.21}$$

$$\begin{aligned} -m_{11}+m_{22}-m_{33} &= -(1-2y^2-2z^2)+(1-2x^2-2z^2)-(1-2x^2-2y^2) \\ &= 4y^2-1 \end{aligned} \tag{8.22}$$

$$\begin{aligned} -m_{11}-m_{22}+m_{33} &= -(1-2y^2-2z^2)-(1-2x^2-2z^2)+(1-2x^2-2y^2) \\ &= 4z^2-1 \end{aligned} \tag{8.23}$$

$$x = \frac{\sqrt{m_{11}-m_{22}-m_{33}+1}}{2} \tag{8.24}$$

$$y = \frac{\sqrt{-m_{11}+m_{22}-m_{33}+1}}{2} \tag{8.25}$$

$$z = \frac{\sqrt{-m_{11}-m_{22}+m_{33}+1}}{2} \tag{8.26}$$

糟糕的是，不能将这个技巧用于所有 4 个分量，因为平方根将始终产生正的结果值（更确切地说，我们没有选择正根或负根的基础）。但是，由于 **q** 和−**q** 代表相同的定向，我们可以任意选择使用非负根作为 4 个分量之一，并且仍然总是返回正确的四元数。我们只是不能将上述技术用于四元数的所有 4 个值。

另一种求解方式是检查对角矩阵元素的总和与差值：

$$m_{12}+m_{21} = (2xy+2wz)+(2xy-2wz) = 4xy \tag{8.27}$$

$$m_{12}-m_{21} = (2xy+2wz)-(2xy-2wz) = 4wz \tag{8.28}$$

$$m_{31}+m_{13} = (2xz+2wy)+(2xz-2wy) = 4xz \tag{8.29}$$

$$m_{31}-m_{13} = (2xz+2wy)-(2xz-2wy) = 4wy \tag{8.30}$$

$$m_{23}+m_{32} = (2yz+2wx)+(2yz-2wx) = 4yz \tag{8.31}$$

$$m_{23}-m_{32} = (2yz+2wx)-(2yz-2wx) = 4wx \tag{8.32}$$

有了这些公式，就可以制定出两步策略。首先，可以使用式（8.21）～式（8.26）中的一个来求解迹中的一个分量，然后将已知的值代入式（8.27）～式（8.32）中以求解其他 3 个分量。从本质上讲，这种策略可以归结为从表 8.2 中选择一行，然后从左到右求解该行中的公式。

表 8.2　从旋转矩阵中提取四元数

$w=\frac{\sqrt{m_{11}+m_{22}+m_{33}+1}}{2}$	$\Longrightarrow$	$x=\frac{m_{23}-m_{32}}{4w}$	$y=\frac{m_{31}-m_{13}}{4w}$	$z=\frac{m_{12}-m_{21}}{4w}$
$x=\frac{\sqrt{m_{11}-m_{22}-m_{33}+1}}{2}$	$\Longrightarrow$	$w=\frac{m_{23}-m_{32}}{4x}$	$y=\frac{m_{12}+m_{21}}{4x}$	$z=\frac{m_{31}+m_{13}}{4x}$