出一个扩展的例子。

1.2.3 邦弗朗尼原理的一个例子

假设我们确信在某个地方有一群坏人，我们的目标是把他们揪出来。再进一步假定我们有理由相信，这些坏人会定期在某个宾馆聚会来商讨他们的破坏计划。对于问题的规模，我们再给出如下假设。

(1) 有 10 亿人可能是坏人。

(2) 每个人每 100 天当中会有一天去宾馆。

(3) 一个宾馆最多容纳 100 个人。因此，100 000 个宾馆已足够 10 亿人中的 1%在某个给定的日子入住。

(4) 我们将对 1000 天的宾馆入住记录进行核查。

为了在上述数据中发现坏人的踪迹，我们可以找出那些在两个不同日子入住同一宾馆的人。但是假设实际上并没有坏人。也就是说，给定某一天，每个人都是随机地确定是否去宾馆（概率为 0.01），然后又是随机地从 10^5 个宾馆中选择一个。从上述数据中，我们能否推断出某两个人可能是坏人？

接下来做个简单的近似计算。给定某天，任意两个人都决定去宾馆的概率为 0.0001，而他们入住同一宾馆的概率应该是 0.0001 除以 10^5（宾馆的数量）。因此，在给定某天的情况下，两个人入住同一宾馆的概率是 10^{-9}。在任意给定的两个不同的日子，两人入住同一宾馆的概率就是 10^{-9} 的平方，即 10^{-18}。需要指出的是，上述推理中只需要两人两次中每次入住的宾馆相同即可，并不需要两次都是同一家宾馆[①]。

基于上述计算，我们必须要考虑到底出现多少次事件才意味着发生破坏。上例中，“事件”的含义是“两个人在两天中的每一天入住相同的宾馆”。为了简化数字运算，对于较大的 n，$\binom{n}{2}$ 大概等于 $n^2/2$。下面都采用这个近似值。因此在 10^9 中的人员组对个数为 $\binom{10^9}{2}=5\times10^{17}$，而在 1000 天内任意两天的组合个数为 $\binom{1000}{2}=5\times10^5$。疑似破坏事件的期望数目应该是上述两者的乘积再乘上“两个人在两天中的每一天入住相同的宾馆”的概率，结果为

$$5\times10^{17}\times5\times10^5\times10^{-18}=250\ 000$$

也就是说，大概有 25 万对人员看上去像坏人，即使他们根本不是。

现在假定实际上只有 10 对人员是真正的坏人。警察局需要调查 25 万对人员来寻找他们。除了会侵扰近 50 万无辜人们的生活外，所需的工作量也非常大，因此上述做法几乎是不可行的。

① 如第一天大家都住 A 宾馆，第二天都住 B 宾馆。但 A 可以不等于 B。——译者注