

$$L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2 \cos \beta = x^2 + y^2$$

由此可得

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{L_1^2 + L_2^2 - x^2 - y^2}{2L_1L_2} \right)$$

同样, 根据余弦定理可得

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{x^2 + y^2 + L_1^2 - L_2^2}{2L_1\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

定义 $\gamma = \text{atan2}[y, x]$, 由此, 运动学逆解的右向解 (其中一组解) 可写成

$$\theta_1 = \gamma - \alpha, \quad \theta_2 = \pi - \beta$$

而左向解 (另外一组解) 可写成

$$\theta_1 = \gamma + \alpha, \quad \theta_2 = \beta - \pi$$

如果 $x^2 + y^2$ 落在范围 $[L_1 - L_2, L_1 + L_2]$ 之外, 则逆解不存在。

上面这个简单的例子表明, 对于开链机器人而言, 运动学逆解可能存在多组解, 这与运动学正解情况不同。对于后者, 给定一组关节角总是存在唯一的末端位形与之对应。事实上, 一个三杆的开链机械手有无穷组解对应其工作空间内的一个点 (x, y) , 这是由于机构中存在额外的自由度, 术语上称之为**运动学冗余**。

本章中, 我们首先讨论空间 6 自由度开链机器人的运动学逆解问题。绝大多数情况下, 这类机器人的运动学逆解数量是有限的, 这里只考虑两个常见的例子: PUMA 和 Stanford 机器人, 它们的运动学逆解解析式很容易导出。而对于更为通用的开链机器人, 我们则采用牛顿-拉夫森方法求解其运动学逆解问题。这个过程本质上是个数值迭代算法的应用, 如果所选的关节角初值接近真实值, 计算结果很容易实现收敛。

188

6.1 逆运动学的解析求解

首先重写一下空间 6 自由度开链机器人正向运动学的指数积公式:

$$T(\theta) = e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2} e^{[S_3]\theta_3} e^{[S_4]\theta_4} e^{[S_5]\theta_5} e^{[S_6]\theta_6} M$$

给定末端坐标系 $X \in SE(3)$, 逆运动学就是找出满足 $T(\theta) = X$ 的关节角 $\theta \in \mathbb{R}^6$ 。下面小节中将以 PUMA 和 Stanford 机器人为例, 推导它们运动学逆解的解析式。

6.1.1 6R PUMA 型机械臂

我们首先考虑 6R 型 PUMA 机械臂。如图 6.2 所示, 机器人处于初始位置: ①两个肩关节正交于一点, 关节 1 与 \hat{z}_0 轴重合, 关节 2 与 $-\hat{y}_0$ 轴重合; ②关节 3 (肘关节) 位于 \hat{x}_0 - \hat{y}_0 平面内且与关节 2 的轴线平行; ③关节 4、5 和 6 (腕关节) 相互正交且共点 (腕部中心), 由此形成一个正交型腕部机构。

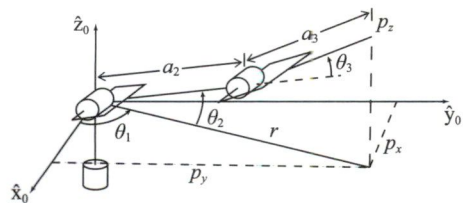


图 6.2 6R PUMA 型机械臂的逆向位置求解